УДК 519.92

СИСТЕМА КАК ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ. ФОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА В КАЧЕСТВЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОТКРЫТОЙ СИСТЕМЫ

© Ю.Г. Коротенков

Korotenkov, Y.G. System as the subject of mathematics and computer science. Formal system as a representation of open system. The article discusses the notions of open system, formal system, algebraic system, etc. and laws of axiomatic formal system.

Система – важнейший объект познания, являющийся, к тому же, не менее важным средством познания. Условием существования и развития любого объекта или процесса является его системность, а залогом исследования – систематизация. Поэтому *система – важнейший объект общего и информационного образования*, информатики – науки и информатики – предмета обучения.

Система – понятие общенаучное, восходящее к философии и теории познания. Математика (в частности, алгебра), информатика и другие дифференцированные науки каждая по-своему интерпретирует его, осуществляет свои представления системы. Поэтому важным представляется найти общее между различными теориями, общую интерпретацию их понятий и содержания с *последующим отражением этого общего в образовании* (в вузе, школе, в профильном или специализированном обучении).

З а м е ч а н и е. Предлагаемый вниманию материал сам может использоваться в качестве предмета обучения как *математики* – на математических факультетах, *алгебры, компьютерной математики*, так и в обучении *информатики* – в специализированном или углубленном обучении.

Система представляет собой множество *закономерно взаимосвязанных* частей, компонентов, элементов, процессов, процедур и образующих в совокупности единое целое (целостное образование). Различают открытые и замкнутые, или формальные системы.

Открытая система определяется только своими закономерностями связи между образующими ее частями и может изменять количественный состав элементов и отношений, принимая в ходе своего развития различные состояния. Как и во всяком множественном образовании взаимоотношения компонентов системы выражаются через отношения их элементов, то есть через внутренние отношения элементов системы. Следовательно, закономерности системы можно трактовать как ее определяющие отношения, или системообразующие отношения, которым обязан соответствовать каждый ее элемент. Более того, каждый элемент среды, соответствующий закономерностям системы, может быть включен в ее состав; так же, как каждое отношение между элементами системы может стать ее внутренним отношением, если оно соответствует (не вступает в противоречие) с ее закономерностями.

З а м е ч а н и е. Дополнение системы новыми элементами и отношениями зависит не только от формальных + условий (соответствия, непротиворечивости), но и от ее содержания, целей и требований развития.

Элемент системы *– это простой (неделимый в пределах этой системы) ее компонент, который участвует в выражении ее закономерностей. И обратно, закономерности системы выражаются в каждом ее элементе.*

Формальная система, во-первых, полностью лишена содержания (абстрагирована от него) и определяется только формальными правилами и отношениями. Во-вторых, она не меняет количественный состав: имеет постоянное множество элементов – носитель системы и фиксированное множество отношений: операционных, предикатных, бинарных. На каждом из этих уровней и на их совокупности выделяются множества определяющих отношений – закономерностей системы.

Операционные отношения в системе определяются операциями на ней – нульарными, унарными, бинарными и в общем случае *n-арными* (n-местными, где n – натуральное число). Ими же определятся соответствующие бинарные отношения между различными термами – выражениями из упорядоченных определенным образом элементов и операций. На самом деле эти отношения являются закономерными, поскольку они действительны для каждых элементов системы.

Предикатные отношения определяются n-арными предикатами P на носителе системы, где $P(x_1, \ldots, x_n) = P(x_1^{\,n}) = 1/0$ для каждых элементов на этом носителе. Поскольку всегда $P(x_1^{\,n}) = 1 \vee P(x_1^{\,n}) = 0$, то каждый предикат и их совокупность порождают закономерные отношения в данной системе.

На этом основании формальное множественное образование А с определенными на нем множествами операций и предикатов, соответственно, $\{F\}$ и $\{P\}$, называется ***алгебраической системой:*** **A = <A,** $\{F\}$, $\{P\}$>. Множество A называется *носителем* системы (обычно обозначение системы и носителя совпадает), элементы множеств $F = \{F\}$ и $P = \{P\}$ – функциональными символами.

А.И. Мальцев называет ([2]) совокупность алгебраических систем с определенными на них множествами $\{F\}$ и $\{P\}$ операций и предикатов классом этой ***сигнатуры*** ($\{F\}$ и $\{P\}$).

Элементы множеств $\{F\}$ и $\{P\}$ А.И. Мальцев понимает как общие функциональные символы, принимающие конкретные значения операций и предикатов в системах этой сигнатуры. Обычно различия между общими и конкретными значениями функциональных символов не делают, но иметь в виду это различие необходимо. Например, ***булева алгебра*** определяется как система B = <B, +, *, `> с двумя бинарными и одной унарной (инверсией) операциями и эквивалентными множествами определяющих отношений B1 и B2:

	B.I		B.II
B1.1.	$x + x = x$	B2.1.	$x * x = x$
B1.2.	$x+y = y+x$	B2.2.	$x*y = y*x$
B1.3.	$x+(y+z) = (x+y)+z$	B2.3.	$x*(y*z) = (x*y) *z$
B1.4.	$x*(y+z) =$ $= (x*y)+(x*z)$	B2.4.	$x+(y*z) =$ $= (x+y)*(x+z)$
B1.5.	$(x`)` = x$	B2.5.	$(x`)` = x$
B1.6.	$(x+y)` = x`*y`$	B2.6.	$(x*y)` = x`+y`$
B1.7.	$y+(x*x`) = y$	B2.7.	$y*(x+x`) = y$

Булевыми алгебрами являются, в частности, *алгебра высказываний* **V = <V, ∨, ∧, ¬ >** с операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания (производной операцией) и алгебра **U =<U(M), ∪, ∩, `>** с носителем *из подмножеств множества M* и операций объединения, пересечения, инверсии, где $N` = M \setminus N$ – дополнение N в M для любого множества $N \subseteq M$. То есть это алгебры единой сигнатуры, или представители единого класса алгебр сигнатуры **Ω = {+, *, `}.** При этом, естественно, не каждая алгебра этой сигнатуры является булевой.

Формальная система определяется множеством *закономерностей на уровне бинарных отношений (тождеств) и уровне термальных выражений*, истинных (равных 1) в этой системе. В этом плане между формальной и открытой системами нет различия (на уровне бинарных и термальных закономерных отношений): и в том, и другом случае требуется соответствие каждого элемента системы этим закономерностям. Поэтому формальная система служит в качестве *средства описания* (моделирования, исследования) открытой системы, представляя ее конкретный образ или состояние в определенный момент времени по совокупности существенных признаков (в соответствии с требованиями этого описания).

Открытая система тоже является образом реальной системы – социальной, производственной, научно-образовательной, социокультурной и т. д., вернее, образом соответствующих областей (объектно-процессуальных сфер), рассматриваемых в комплексе взаимосвязей. То есть это есть продукт систематизации реально существующей сферы с соответствующей формализацией объектов и отношений, с определением системообразующих отношений.

Таким образом, открытые и формальные системы являются и объектами, и продуктами, и средствами единой теории исследования систем – **системологии**, назначением которой является: формирование, изучение, моделирование систем (прежде всего, открытых), т. е. *систематизация*, определение закономерностей, изучение на уровне системы, системных выражений и представлений.

Современный уровень познания (науки, образования, прикладных областей) предполагает первостепенность *системного подхода, процессов систематизации и системного моделирования.* Поэтому общая теория систем – системология по своему значению выходит на одно из ведущих мест в научном исследовании и фактически становится на одном уровне с теорией познания.

Системология – это межпредметная наука на стыке философии, логики, теории познания, математики, информатики, потому что система является общенаучным (общечеловеческим, философским) понятием.

З а м е ч а н и е. Часто эту науку называют также *систематикой*. Однако это название годится только для ее раздела (проекции) на уровне математики и теории информации: на уровне формального и формализованного исследования систем. В общем случае это системология, наука, определяющая *методологию и средства* исследования систем.

Для исследования и описания систем необходимо знание их общей структуры, основных понятий, связанных с ними или имеющих к ним отношение, типов и принципов взаимосвязи и взаимодействия их частей и внутренних процессов. В этом состоит сущность системного подхода и реализующего его системного анализа. В [1] выделяются три основных компоненты системологии:

- область исследования;
- совокупность знаний в этой области;
- методология накопления новых знаний и их использования к решению относящихся к этой области задач.

В ***область исследования*** по [1] входят все типы отношений, существенные для всех систем или отдельных их типов. В системологии элементная основа систем отходит на второй план (как носитель множества отношений), природа которой в данном случае несущественна, хотя при изучении конкретной модели она уже приобретает главенствующее положение, а система отношений становится проявлением взаимосвязи и взаимодействия ее частей и элементов. Это естественно, поскольку отношения могут возникать и реализовываться только в конкретной вполне определенной предметной области.

Абстрагирование от конкретного содержания системы дает возможность к ее *двухмерному* (см. [1]) исследованию, на двух взаимодействующих уровнях:

- на уровне обычного *экспериментального* исследования системы,
- на уровне *системологии* с применением общей методологии и соответствующих технологий к изучению конкретных систем.

Исследование на уровне дифференцированной научной системы оказывается всего лишь экспериментальным с позиции системологии.

К ***знаниям*** в области системологии следует отнести как знания, полученные научно-теоретическим путем, путем исследований и методологических изысканий, так и экспериментально. Необходима определенная формализация, а также обобщение этих знаний, представление в виде системы и/или модели.

К *знаниям* относят также элементы абстрактной открытой системы как систематизированной информации (динамическую информацию системы) в отличие от *данных* системы, служащих для описания системы, ее элементов, связей и отношений (статистической информации системы). То есть выделяют знания о системе и знания самой системы.

По [1] «главная задача ***системной методологии*** – предоставление в распоряжение потенциальных пользователей, представляющих разные дисциплины и предметные области, методов решения всех определенных типов системных задач». То есть, системная методология – это общий (универсальный) методический *инструментарий*, применяемый при исследовании, описании и построении конкретных систем.

Основной предмет исследования системологии образуют открытые системы с переменным составом элементов и отношений, рассматриваемые в процессе их развития в аспекте их инвариантных (определенных системными закономерностями) и множествами конкретных *состояний*. Каждое конкретное состояние открытой системы может быть представлено формальной системой с фиксированными множествами элементов и отношений. Однако на самом деле здесь всегда есть элемент условности. Точный состав элементов и отношений в открытой системе либо неизвестен (невозможно точное описание), либо несуществен для исследования. Поэтому на уровне формального представления открытой системы в виде $S = \langle S, P \rangle$ из носителя и множества отношений эти множества также предполагаются *открытыми*, переменными, то есть любое состояние открытой системы фиксирует только *существенные* для данного этапа ее исследования элементы и отношения. Следовательно, формальные системы служат в качестве средства, инструмента при исследовании открытых систем. При этом несколько модифицируется понятие самой формальной системы: на первый план выходит формальность выражения системы на уровне абстрактных символов элементов и отношений, а требование фиксированности (постоянства) образуемых ими множеств является третьестепенным. То есть рассмотрение формальной системы как фиксированного или переменного множества (с переменной мощностью) зависит от контекста и цели исследования.

Существенными требованиями здесь являются:

- инвариантность (постоянство) *архитектуры системы*, определяемой системообразующими отношениями;
- фиксированность (идентификация) структуры каждого состояния системы.

З а м е ч а н и е. Архитектура абсолютно постоянна до тех пор, пока существует данная система, в то время как структура лишь отражает эволюцию системы, выражая при этом относительно инвариантные связи и отношения компонентов системы.

В этом плане между понятием формальной системы на уровне системологии и формальной системой на уровне теории алгебраических систем имеются определенные разночтения, несоответствие. В первом случае это абстрактное выражение (обозначение) открытой системы в качестве объекта ее формализованного изучения на уровне системного моделирования. Во втором случае это одна из алгебраических систем определенной сигнатуры (в рамках единой открытой системы сигнатура не может изменяться). При этом сохраним привычный термин теории алгебры – «*класс*» для обозначения объектного образования заданной сигнатуры операций и предикатов.

Между тем, формальное теоретико-множественное представление открытой системы на языке множеств, элементов и отношений является алгебраическим объектом и *предметом алгебры*. Следовательно, необходим единый обобщенный подход к изучению предмета ***алгебраической системологии***.

Во-первых, следует отметить, что понятие множества в системологии соответствует понятию абстрактного множества, порождаемого своими элементами: $M = \{m \mid m \in M\}$ и обладающего свойствами:

1. $M \notin M$.
2. M может быть вполне упорядочено.

З а м е ч а н и е. Наличие указанных требований к множеству предполагает существование образований, не обязательно являющихся множествами. В алгебре такие образования называют *классами*, хотя понятие «класс» не является однозначным. Удобнее пользоваться термином «объектное образование», которое может быть или не быть множеством. В системологии мы имеем дело только с множествами, но при переходе на терминологию формализации надо помнить о несколько расширенном толковании понятия «объектного образования» (класса).

Во-вторых, следует определиться с понятием закономерности открытой системы, то есть с ее алгебраическим представлением. Мы заметили уже, что закономерность выражается на уровне элементов системы, и каждый ее элемент может участвовать в ее выражении. Поскольку в каждом таком выражении может участвовать конечное количество элементов, то это выражение представляется в виде истинного отношения $P(x_1{}^n)$ для некоторого числа элементов системы. Но наличие закономерности означает независимость ее истинности от конкретных элементов, участвующих в ее выражении. Это может быть только в том случае, если P – ***высказывание***:

$$\mathbf{P(x_1{}^n) = \forall(x_1{}^i)\exists(x_{i+1}{}^n)(P`(x_1{}^n)) = Q_1{}^n(P`(x_1{}^n)),}$$

где Q_k – условное обозначение кванторов общности и существования.

Высказывание – *замкнутая формула* относительно переменных.

Следовательно, понятие открытой системы соответствует понятию аксиоматизируемого класса алгебраических систем, определенной А.И. Мальцевым в [2], или просто понятию аксиоматизируемого класса систем:

Аксиоматизируемый класс K систем определяется некоторым набором замкнутых формул (высказываний), истинных на каждой системе этого класса – некоторой *элементарной теорией* T = Th K в терминологии А.И. Мальцева) – **K = K(T) = K(Th K)**.

В то же время, каждое состояние открытой системы, представляемое формальной системой, сохраняет все ее закономерности, и каждая система, сохраняющая эти закономерности, является состоянием ее инвариантного образа. То есть *состояния открытой системы образуют аксиоматизируемый класс с элементарной теорией, определяемой закономерностями этой системы*.

Однако в понятиях алгебраической системы и формальной системы как объекта системологии имеется явное противоречие. Формальные системы, выражающие различные состояния открытой системы, являются образами этой системы, показывая ее в развитии во времени и в пространстве. То есть это *различные выражения* (проявления) одной и тоже системы, определенной своими закономерностями и конкретными отношениями на каждый момент времени и ее развития. С точки зрения алгебраической теории это, напротив, множество *различных формальных систем*, пребывающих в таковом качестве только по наличию определенной на них *общей сигнатуры* из некоторых множеств операций и предикатов. Если же такой сигнатуры нет, то большинство из них вовсе и не системы, поскольку не все отношения, определенные на конкретном представлении (состоянии) открытой системы, имеют операционно-предикатное выражение.

Каждая сигнатура из множеств $\{F\}$ и $\{P\}$ операций и предикатов определяет единственную формальную систему в качестве объекта системологии – систему с закономерностями, определенными тождественными бинарными отношениями на термов – результатов операций и выражений закономерностей типа:

$$\forall \mathbf{x_1^n} \exists \mathbf{x_{n+1}} (\mathbf{x_{n+1}} = \mathbf{x_1^n} \boldsymbol{\omega}),$$
$$\forall \mathbf{x_1^n} (\mathbf{P}(\mathbf{x_1^n}) = \mathbf{1} \vee \mathbf{P}(\mathbf{x_1^n}) = \mathbf{0}),$$

где $\omega \in \{F\}$ – n-арная операция, $P \in \{P\}$ – n-арный предикат.

З а м е ч а н и е. С формальной точки зрения здесь нет полного соответствия между этой системой и классом алгебр сигнатуры $\{F\}$ и $\{P\}$, поскольку данный класс не обязан быть множеством. Но в данном случае этот класс можно считать более определенным (в контексте системологии). Дело в том, что универсальный язык алгебры предусматривает абстрактно-виртуальное рассмотрение объектов алгебраической сигнатуры. Но в данном случае мы рассматриваем алгебраические системы в приложении к системологии (науке о системах с вполне определенной семантикой операций и отношений), поэтому вправе предполагать, что в данном случае объектное образование (класс систем) не выходит за пределы множества.

Сама по себе система, определенная сигнатурой операций и предикатов, мало отражает действительные закономерности представляемой ею открытой системе: в большей степени они могут выражаться на уровне *определяющих отношений* в алгебраической системе. То есть в качестве объекта системологии алгебраическая система A должна обозначаться как $A = \langle A, \{F\}, \{P\}, Z\rangle$, где Z – определяющие отношения, определенные в сигнатуре $\{F\}$ и $\{P\}$. С этой точки зрения A является образом (состоянием) свободной системы $\langle F, \{F\}, \{P\}\rangle$ с тем же множеством образующих.

Поэтому во избежание двусмысленности толкования терминологии будем избегать употребления термина «алгебраическая система», заменяя ее термином **«аксиоматизируемая формальная система» – АФС**;

- алгебраическая система по А.И. Мальцеву является АФС;
- АФС является алгебраической по форме (способу) выражения.

При рассмотрении алгебраических систем в терминологии А.И. Мальцева будем их называть термином **«алгебраические мальцевские системы» – АМС**.

Аксиоматизируемая формальная система (АФС) – это объединение элементов и отношений, определяемых множеством тождественно истинных предикативных высказываний, которые выражаются через элементы этого множества (носителя системы) и каждый элемент которого участвует в выражении этих высказываний.

Каждая открытая система имеет представление в виде некоторого множества аксиоматизируемых формальных систем (представление не только не обязано быть однозначным, но даже предполагает многозначность).

ЗАКОНОМЕРНОСТИ АКСИОМАТИЗИРУЕМОЙ ФОРМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Следует обратить внимание, что закономерности системы и системообразующие отношения не всегда одно и то же:

- Системообразующие отношения, как и выражающая их архитектура системы, являются абсолютно инвариантными (устойчивыми) при эволюции системы – при смене ее состояний.
- Закономерности системы могут возникать и исчезать по мере ее развития, характеризуя определенный этап в этом развитии, и потому являясь, как и выражающая их структура системы, относительно инвариантными.

Требования к системообразующим отношениям и закономерностям системы могут быть различными, и они могут иметь различные формы выражения на уровне логических высказываний (замкнутых логических выражений – аксиом). То есть закономерности системы определяют ее состояние на определенном этапе развития, где она принимает множество конкретных значений (состояний).

Система имеет множество закономерностей, имеющих выражение в истинных на ней предикатных высказываниях, которые могут сохранять свою истинность при переходе к подсистемам. С формальной (алгебраической) точки зрения подсистема – такое образование внутри системы, которое сохраняет свойства этой системы, определяемые системообразующими отношениями и другими закономерностями. В этом плане с сохранением истинности формул типа $\forall \mathbf{x_1^n} (\mathbf{P}(\mathbf{x_1^n}))$ проблем не возникает. Однако закономерность, выражаемая формулой типа $\forall x_1{}^i \exists x_{i+1}{}^n (P(x_1{}^n))$, не обязана сохраняться на подсистемах.

Понятия подсистемы в системологии не совпадает с понятием подсистемы в алгебре. Если подсистема алгебраической системы полностью содержится в ней, то в системологии она является частью содержания системы, образуемого ее элементами (знаниями), отношениями и описанием системы (данными). Она лишь пересекается с основной системой на уровне знаний более высокого уровня, чем другие знания этой подсистемы, тогда как другие ее знания с позиции этого (высокого) уровня представляют собой лишь *данные*. В этом состоит логика систематизации и формирования открытых систем.

Однако в общем случае структура уровней открытой системы неоднозначна: в определенном смысле она субъективна, в определенной мере обусловлена целями исследования системы и моделирования. При многоуровневом моделировании, начиная с концептуального и заканчивая логико-семантическим, а также его формальными представлениями, различным образом трактуется понятие элемента (элементарной единицы системы) и, соответственно, их закономерной связи. Поэтому возможны следующие случаи.

1. Открытая система является многоуровневой, где каждый вышестоящий (следующий) уровень – это структурная систематизация предыдущего уровня. Знаниями следующего уровня становятся некоторые структурированные образования из знаний предыдущего уровня на основании определенной закономерной связи между ними.

Пусть M – подсистема открытой системы S, N – множество их общих элементов. На этом множестве могут выполняться не все закономерности основной системы S, например, $\exists$-замкнутые высказывания. Но элементы этого множества участвуют в выражении этих высказываний на уровне S, а значит, *соответствуют им*. Следовательно, другие ресурсы системы M, другие ее знания обеспечивают это соответствие, поэтому она может иметь только те закономерности, элементы и отношения, которые не нарушают этого соответствия. Как только подсистема теряет связь с системой (следующего уровня), начинает развиваться по собственным законам, без оглядки на законы этой системы, она перестает им соответствовать и в результате перестает быть подсистемой. Эти же требования предъявляются к системе на этапе структурно-концептуальной систематизации множества систем.

2. Случай, когда подсистема открытой системы рассматривается в качестве одной из составляющих основной системы, выражающей закономерную связь ее частей. Этот случай не исключает наличие в подсистеме своих закономерностей (свойственных только ей) и «дополнительных» знаний, но основу ее составляют общие знания с основной системой.

Наследственность. В случае алгебраических систем замкнутость некоторого класса относительно подсистем (наследственность) считается хорошим свойством и признаком многообразия (класса систем, замкнутого относительно подсистем, гомоморфизмов и декартовых произведений). В случае открытых систем и представляющих их АФС это выглядит несколько поиному.

Пусть, н а п р и м е р, в АФС A и в ее некоторой подсистеме B тождественно истинны высказывания типа

$$\forall x_1^i \exists x_{i+1}^n (P(x_1^n)), \tag{1}$$

причем, $x_1^i \in B \Leftrightarrow x_{i+1}^n \in A$. В данном случае это указывает на самодостаточность подсистемы B, ведущие к ее обособленности, отрыву от макросистемы. То реальная открытая система, являющаяся подсистемой другой открытой системы, не только не обязана наследовать все ее закономерности, но и не должна этого делать – в целях нормального развития (в условиях разделения труда) в аспекте межсистемных отношений.

З а м е ч а н и е. С другой стороны, если в формуле (1) $x_1^i \in B \Rightarrow x_{i+1}^n \in A$, то это говорит об излишней опеке со стороны надсистемы (A), неминуемо ведущей к ослаблению внутренних системных связей в B. Впрочем, для подобного характера межсистемных отношений могут быть субъективные причины. Но в любом случае превращение этого характера в тенденцию таит в себе опасность.

Развитие современных открытых социальных систем означает развитие межсистемных связей, опору на системную среду и макросистему, что исключает самозамыкание (обособленность, самоизоляцию) системы, также как и излишнее администрирование со стороны внешних структур. То есть любая система должна развиваться по своим законам, но в соответствии с общими целями и характером их достижения. То есть необходимо единообразие концепции, необходимы единые принципы и другие закономерности, имеющие выражение в форме тождественно истинных высказываний типа $\forall x_1^n(P(x_1^n))$. Разумеется, это есть оптимальная форма системной закономерности, наследуемая подсистемами. Но не обязательно единственная. Просто другие случаи имеют заведомо специализированный характер, отражающий специфику конкретных межсистемных отношений.

Пусть $A = \langle A, F, P. Z\rangle$ – АМС с сигнатурой операций $F = \{F\}$ и предикатов $P = \{P\}$ и множеством определяющих отношений Z. Пусть X – множество образующих системы A, $G = G(X)$ – свободная система этой сигнатуры. Определяющие отношения порождают в G конгруэнцию $q \in G^2$. Тогда $G_1 = G/q$ является свободной Z-системой (все системы, удовлетворяющие определяющим отношениям Z, являются ее образами). Поскольку A также удовлетворяют отношениям Z, то $A = G/\tau$ для некоторой конгруэнции $\tau \supseteq q$ на G. То есть A является гомоморфным образом системы G/τ, сохраняющим ее отношения, в том числе операции и истинные значения предикатов данной сигнатуры.

По сути дела в A можно выделить еще три типа отношений, не порождающихся отношениями Z:

1. Эквивалентные отношения, порожденные тождественными соотношениями между некоторыми группами элементов системы A, по сути дела являются закономерностями – тождественно истинными $\forall$ – замкнутыми высказываниями. Поскольку это отношения между термами (функциональными выражениями сигнатуры F), то речь идет о некоторой конгруэнции ρ на G/τ, $A = (G/\tau)/\rho$.

2. Множество бинарных предикатов, определенных на A (и только на A), истинных для некоторых элементов из A и ложных для остальных. Эти предикаты порождают множество отношений $\Phi_i \subseteq A^2$, $i \in I$. Объединение этих отношений $\Phi = \cup\, \Phi_i$ ($i \in I$) и есть второй тип бинарных отношений.

3. Кроме того, на A могут быть определены n-арные предикаты, где n принимает значения из множества натуральных чисел N. Среди этих предикатов, не порождающихся множеством P, могут быть высказывания, т. е. отношения, выражающие определенные закономерности на A (локально значимые).

При переходе на язык системологии и АФС получаем следующее:

$G = \langle G(X), F, P\rangle$ – система с закономерностями, определенными сигнатурой операций и предикатов, которая (система) принимает множество состояний, совпадающими с объектно-алгебраическими образованиями с заданной сигнатурой (классом АМС). A – образ системы G, порожденный закономерностями Z и другими отношениями, свойственными A. Следовательно, A – формальная система $A = <A, R>$, где R – множество отношений (функциональных, бинарных, n-арных), определенных на A, порождаемых операциями (между операционными термами) и предикатами заданной сигнатуры, системными закономерностями и отношениями, свойственными A.

Однако здесь имеются и некоторые расхождения между языками алгебры и системологии. В *алгебре* бинарные отношения интерпретируются в контексте операций:

- как тождественные отношения двух элементов, порождающие тождества других элементов в аспекте операционных отношений:
- как отношения, порождаемые производные отношения (подмножества в A^2) с учетом других отношений на A.

Эти отношения интересны в контексте конгруэнций и эндоморфизмов, порождаемых и индуцируемыми ими.

В *системологии* дело обстоит несколько другим образом: отождествление элементов часто не только не нужно, но и не всегда возможно (имеет смысл). Действительно, отождествление двух субъектов в социальной системе, устанавливающих между собою какие-либо отношения, будет, мягко говоря, не очень логично.

С другой стороны, открытая система может относиться к самому различному типу: быть более или менее формальной, иметь более или менее ярко выраженную семантику. Так, например, к открытым системам можно отнести компьютерную программу и базу данных (СУБД), которые всегда открыты для модификации и расширения. Поэтому формальную систему, представляющую открытую систему, в принципе всегда можно соотнести с АМС.

Любую АМС можно рассматривать как АФС, перенося обозначение закономерностей, определенных сигнатурой ее операций и предикатов во множество ее закономерностей Z, т. е. рассматривать как $<A, Z>$, имея в виду множество отношений, порождаемых Z. Более того, на языке АФС можно рассматривать системы, не вписывающиеся в рамки АМС.

Н а п р и м е р, поле в теории алгебр, которое относительно операций $+$, $*$, $+^{-1}$, $*^{-1}$ не является алгебраической системой, поскольку нет деления на 0. Но на языке АФС это система, определяемая как кольцо с тождественно истинными высказываниями ∀∃-типа:

$$\forall(x, y, u)\ \exists z\ (x*z = y \wedge x*u = y \rightarrow u = z).$$

Можно вообще поле не обозначать как множество с определяющими отношениями, записав все, что требуется на языке предикатов и высказываний:

$$\forall(x, y, u)\ \exists z\ (P(x, y, z) \wedge (P(x, y, u) \rightarrow u = z).$$

Стоит отметить при этом, что с позиции теории алгебраических систем данные определения объекта как АМС и как АФС не эквивалентны: во втором случае нет *наследственности* относительно подсистем и гомоморфизмов (гомоморфных образов). То есть надо учитывать контекст, в котором осуществляется рассмотрение АМС.

Гомоморфизм и гомоморфные образы. Система – совокупность закономерно связанных между собою частей. Однако под содержанием системы мы подразумеваем не эти части, а совокупность ее элементов и отношений, выражающих ее закономерные связи. То есть системообразующие отношения – отношения, образующие архитектуру системы, иначе говоря, это концептуальные связи. При этом взаимосвязи между элементами системы могут выражаться на уровне другого множества закономерностей, являющихся следствием системообразующих отношений или их дополнением, получаемым на этапе развития системы. Это важно при определении свободных образов системы.

Каждая система должна иметь *свободный образ, инвариантный* при ее изменениях и развитии. Очевидно, что этот свободный инвариантный образ определяется системообразующими закономерностями системы, взаимосвязями между образующими ее частями. Как правило, эти части, имея самостоятельное значение, а следовательно, закономерную обусловленность, тоже являются системами – подсистемами со свойственными им закономерными отношениями. То есть *открытая развивающаяся система – это система самостоятельных подсистем, образуемая на основании их внутренней и внешней взаимообусловленности, взаимосвязи, сбалансированности*.

Состояние системы, определяемое множеством ее элементов и отношений в определенный момент времени и развития, является ее конкретным образом, а его структура – конкретным следствием (состоянием) архитектуры. Поскольку любой конкретный образ системы сохраняет ее системообразующие отношения, то формально можно говорить о гомоморфизме и рассматривать его как гомоморфный образ свободного образа системы. Хотя фактически это не совсем так, а возможно, и совсем не так:

- здесь, вообще говоря, другой состав элементов и отношений, поэтому говорить о сохранении отношений можно только на уровне преемственности;
- здесь речь можно вести не об отождествлении элементов на уровне их классификации (разбиение на классы эквивалентных элементов), а о *расширении конгруэнций*.

З а м е ч а н и е. Пусть $A = <A, F, P. Z>$ – свободный образ системы с сигнатурой операций $F = \{F\}$ и предикатов $P = \{P\}$ и множеством определяющих отношений Z. Тогда существует конгруэнция ρ на $A` = <A, F, P>$, порожденная множеством $Z$. Тогда любое состояние этой системы представляется как $B = <A, F, P. R>$, где $R$ – множество отношений, порождаемое множеством закономерностей $Z` \supset Z$ и множеством отношений, выражающих его конкретику. Следовательно, существует конгруэнция τ на $A` = <A, F, P>$, где $\tau \subseteq R$.

При этом, если мы находимся в пределах класса алгебраических мальцевских систем (АМС), то множество Z и отношения «конкретики» – термы, образованные из элементов этих систем и функциональных символов заданной сигнатуры.

Осталось ответить на вопрос, каким должно быть множество Z? Ответ на это дает общая теория алгебраических мальцевских систем.

Система $F = F(X)$, определенная в сигнатуре алгебраических мальцевских систем, где X – произвольное множество – F над множеством X – называется *свобод-*

ной в классе $\Im$, если для любого взаимно однозначного отображения μ: $X \to A \in \Im$, существует единственный такой гомоморфизм η: $F \to A$, что $\boldsymbol{\mu = \nu\eta}$, где ν: $X \to F$ – вложение.

В частности, любая система класса $\Im$ с множеством образующих X является эпиморфным образом свободной системы $F(X)$.

В контексте системологии назовем систему $F(X)$ *свободным объектом*.

Для того чтобы класс алгебраических систем $\Re$ имел свободные образы, или свободные системы, он должен быть *реплично полным*:

Для каждой системы A сигнатуры $\{F, P\}$ имеется такая система B класса $\Re$ и такой гомоморфизм α: $A \to B$, что для любого гомоморфизма φ: $A \to C \in \Re$ существует гомоморфизм ξ: $B \to C$ и $\varphi = \alpha\xi$. Система B называется **$\boldsymbol{\Re}$-репликой** для системы A.

Класс $\Re$ является, в свою очередь, реплично полным тогда и только тогда, когда $\Re$ – *квазимногообразие* или, в частности, *многообразие.*

Класс алгебраических систем называется **казимногообразием**, если он определяется множеством *квазитождеств* – замкнутых формул типа

$$\forall\, \mathbf{x_1^n}\ (\mathbf{P_1(x_1, \ldots, x_n) \to P_2(x_1, \ldots, x_n)}).$$

Класс алгебраических систем называется **многообразием**, если он определяется множеством *тождеств* – замкнутых формул типа

$$\forall\, \mathbf{x_1^n}\ (\mathbf{P_1(x_1, \ldots, x_n)}).$$

Условие, конечно, строгое и вносит достаточно сильное ограничение на множество системообразующих отношений. Однако на концептуальном уровне определения системы или на уровне межсистемных (системно-подсистемных) связей предполагаются именно тождественные и/или квазитождественные закономерности:

- отношения закономерной взаимосвязи образующих частей (подсистем) системы;
- принципы взаимодействия, распространяющиеся на все компоненты системы;
- законы, обязательные для каждого элемента системы.

Однако в случае квзимногообразия возникают проблемы с гомоморфными образами систем. В случае класса алгебраических мальцевских систем, определяемых тождественными отношениями, порождаемыми символами элементов и сигнатуры, *состояниями системы являются гомоморфные образы свободных объектов или других состояний этой системы*, на которых выполняются эти (определяющие) тождественные отношения. Но если многообразие замкнуто относительно гомоморфных образов, то квазимногообразие – в общем случае нет: не все гомоморфные образы его элементов принадлежат ему.

Эту проблему можно устранить, если в качестве состояний системы рассматривать не гомоморфные образы ее свободного объекта, а аксиоматизируемые формальные системы $\mathbf{B = <A, \mathcal{R}, \mathcal{P}, \tau>}$, где $A = <A\ \mathcal{R}, \mathcal{P}, \mathcal{Z}>$ – свободный образ (свободный объект) системы, а τ – *конгруэнция*, соответствующая гомоморфизму φ: $A \to C = A/\tau$. Очевидно, что конгруэнция τ как множество отношений содержит множество определяющих (системообразующих) отношений Z. Следовательно, система $B = <A, \mathcal{R}, \mathcal{P}, \tau>$ является состоянием системы A независимо от того, является ли ее состоянием система C.

Таким образом, только в случае *многообразия* алгебраических систем существует полное *соответствие* АМС и АФС, вернее, многообразия, определенного его абстрактным свободным объектом и множеством состояний этого объекта – множества его гомоморфных образов. Хотя, надо отметить, что не всегда нужна идентификация классов эквивалентности в качестве элементов другого (гомоморфного) объекта – не всегда допустимо отождествление элементов исходной системы. Поэтому в аспекте системологии алгебраические мальцевские системы целесообразнее рассматривать как АФС.

Однако и в АФС возможно отождествление какихлибо элементов, порождающее соответствующую конгруэнцию на ней. При этом, как показано выше, не всякий гомоморфный образ системы является ее состоянием. Для этого его необходимо привести в *соответствие с множеством системообразующих отношений*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клир Дж.* Системология. М.: Радио и связь, 1990.
2. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

Поступила в редакцию 22 сентября 2005 г.